

К. т. н. О. Я. ШПИЛЕВАЯ

Россия, Новосибирский государственный технический университет  
E-mail: shpilev@ait.cs.nstu.ruДата поступления в редакцию  
01.11 2007 г.Оппонент д. т. н. С. А. ПОЛОЖАЕНКО  
(ОНПУ, г. Одесса)СИСТЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ МАЯТНИКОВОЙ УСТАНОВКИ  
С СИГНАЛЬНОЙ НАСТРОЙКОЙ

*Синтез адаптивной системы выполнен на основе методов эталонного уравнения, вектора скорости, второго метода Ляпунова. Приведены результаты пассивного эксперимента, рекомендации по выбору параметров системы.*

В теории управления существует ряд классических объектов, на которых проверяют как известные методы расчета регуляторов, так и вновь разрабатываемые. К таким объектам относятся колебательные системы, частным случаем которых являются маятниковые установки. Задачи управления однозвенным маятником, стабилизации его верхнего неустойчивого положения равновесия относятся к числу классических задач механики и теории управления.

В настоящее время значительно расширился класс реальных объектов управления, имеющих аналогичную математическую модель (например, ракета при взлете, солнечные батареи спутников, управление скоростью реакции в ядерном реакторе, шагающие роботы, различные антенные устройства). Это делает актуальной задачу стабилизации маятниковых установок.

Вопросам стабилизации перевернутого математического маятника посвящено много исследований [1—7 и др]. В ряде работ синтез управляющего воздействия выполнен по линеаризованной модели объекта и получен линейный по координатам состояния алгоритм управления, позволяющий обеспечить устойчивость системы при малых углах отклонения от положения равновесия [3—5]. Применение кусочно-линейной аппроксимации нелинейного маятника и методов оптимального управления дает решение задачи для больших начальных возмущений [2]. В этом случае требуется большой объем вычислений, кроме того, сложно одновременно обеспечить устойчивость решения и надежность системы. В [1] рассмотрена задача раскачки и стабилизации маятника в верхнем положении с одновременной стабилизацией подвижной платформы, на которой закреплена ось маятника. Получены релейные законы управления на основе дифференциальной и конечной форм алгоритма скоростного градиента. Во многих

работах задача управления однозвенным маятником решается путем перемещения точки подвеса маятника, как в маятнике Капицы.

В настоящей статье рассматривается решение задачи стабилизации перевернутого маятника с подвижной точкой опоры методом вектора скорости [8] и второго метода Ляпунова, обсуждаются свойства и особенности системы. Согласно выбранному методу в системе организуются разнотемповые движения — так, чтобы неконтролируемые возмущения локализовались в контуре быстрых движений, а свойства контура медленных движений удовлетворяли желательным динамическим требованиям. Такой эффект достигается с помощью обратной связи по вектору первых производных координат состояния или по производным выходной переменной.

Структура регулятора получена методом эталонного уравнения. Нелинейный объект представлен в виде двух подсистем — «маятник» и «платформа». Желаемые динамические свойства системы задаются эталонным дифференциальным уравнением, коэффициенты которого рассчитаны по выбранным показателям качества. Для стабилизации маятника в верхнем положении и подвижной платформы предлагается использовать алгоритм управления с сигнальной настройкой [9], который также можно отнести к виду астатических законов управления со старшей производной выходной переменной. Использование информации об угловом ускорении позволяет повысить скорость отклика регулятора на изменение состояния системы.

Для оценки требуемых производных используют два малоинерционных линейных фильтра первого и второго порядка. Присутствие в системе малоинерционных фильтров оценки производных и «быстрого» адаптора, реализующего сигнальную настройку, приводят к возникновению разнотемповых процессов. Одной из проблем, возникающих при расчете параметров системы, является определение постоянных времени фильтров оценки производных и эталонных моделей подсистем, коэффициента передачи адаптора. Эти величины связаны между собой и, кроме того, зависят от угла отклонения маятника, возникающего из-за действия внешних сил.

**Постановка задачи**

Рассматривается модель перевернутого маятника, ось которого закреплена на подвижной платфор-

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-08-00732-а).

ме. Перемещение оси характеризуется функцией  $s(t)$ , а угловое отклонение маятника — функцией  $\varphi(t)$ . Масса маятника  $m_2$  пренебрежимо мала по сравнению с массой платформы  $m_1$ . К маятнику приложена сила  $m_2 g$  в центре тяжести ( $g$  — ускорение свободного падения).

Математическая модель рассматриваемой системы [5, с. 18] имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) - \frac{g}{L'} \sin \varphi(t) + \frac{1}{L'} \ddot{s}(t) \cos \varphi(t) + m(t) = 0; \\ m_1 \ddot{s}(t) + k_b \dot{s}(t) = k_b u, \end{cases} \quad (1)$$

где  $L'$  — эффективная длина маятника,

$$L' = \frac{J + m_2 L^2}{m_2 L};$$

$J$  — момент инерции относительно центра тяжести;

$L$  — расстояние между осью и центром тяжести;

$k_t$  — коэффициент трения;

$k_b$  — коэффициент передачи;

$u$  — управляющий крутящий момент.

Особенность модели состоит в том, что при малых углах отклонения маятника ее динамика может описываться линейными дифференциальными уравнениями, а при больших отклонениях — нелинейными дифференциальными уравнениями. Полагаем ограниченность перемещения платформы —

$$\max_{0 \leq t < \infty} |S(t)| = s^0,$$

ограниченность амплитуды и темпа внешнего возмущения  $m(t)$  —

$$\max_{0 \leq t < \infty} |m(t)| \leq \delta_1, \quad \max_{0 \leq t < \infty} |\dot{m}(t)| \leq \delta_2, \quad \delta_i = \text{const} < \infty, \quad i=1, 2,$$

пренебрежимо малое трение оси маятника, а также, что угол отклонения маятника и перемещение каретки измерены.

Цель функционирования системы состоит в стабилизации маятника в верхнем положении равновесия и в стабилизации платформы независимо от начальных условий в подсистеме «маятник» и ограниченных внешних возмущениях, т. е. должны выполняться условия:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \text{const}$ . Величина угла отклонения маятника от вертикальной оси, которую система сможет «отработать», зависит от ресурса управления и допустимого пробега платформы. В дальнейшем полагаем, что угол отклонения маятника не превышает  $\pm 60^\circ$ .

#### Описание системы стабилизации с сигнальной настройкой

Нелинейный объект (1) представлен в виде двух подсистем второго порядка: «маятник» и «платформа». Перепишем модель объекта, используя обозначение выходных переменных  $y_1, y_2$  —

$$y_1 = x_1 = s, \quad y_2 = x_3 = \varphi. \quad (2)$$

Тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 = bu; \\ \ddot{y}_2 - k_2 d \sin y_2 + d \ddot{y}_1 \cos y_2 + m = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{где } k_1 = \frac{k_b}{m_1}, \quad k_2 = g, \quad b = \frac{1}{m_1}, \quad d = \frac{1}{L'}.$$

Преобразуем (3), исключив из второго уравнения  $\ddot{y}_1$ :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -k_1 \dot{y}_1 + bu; \\ \ddot{y}_2 = k_2 d \sin y_2 + k_1 d \dot{y}_1 \cos y_2 - d bu \cos y_2 - m. \end{cases} \quad (4)$$

Согласно требованиям к быстродействию системы зададим эталонные процессы уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= F_1 = -a_{12} \dot{y}_1 - a_{11} y_1; \\ \ddot{y}_2 &= F_2 = -a_{22} \dot{y}_2 - a_{21} y_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $a_{ij}$  — постоянные положительные коэффициенты.

Управляющее воздействие представим в виде суммы двух составляющих:

$$u = u_1 + u_2,$$

где  $u_1$  и  $u_2$  определим из равенства правых частей (4) и (5).

В результате закон управления примет вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{db \cos y_2} [a_{22} \dot{y}_2 + a_{21} y_2 + k_2 d \sin y_2 - k_m] + \\ &+ \frac{1}{b} [(2k_1 - a_{12}) \dot{y}_1 + a_{11} y_1], \end{aligned} \quad (6)$$

где переменная  $k_m$  формируется согласно уравнению

$$\dot{k}_m = \gamma \text{sign}(\ddot{y}_2 - F_2). \quad (7)$$

Здесь

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0; \\ -1, & a < 0, \end{cases}$$

$\gamma$  — коэффициент передачи, значение которого удовлетворяет условию  $\gamma < \delta_2$ .

Уравнения (6), (7) описывают алгоритм управления с сигнальной настройкой, который также можно отнести к виду астатических законов управления со старшей производной выходной переменной. Условия устойчивости этого класса систем приведены в [9].

В системе (4), (6), (7) управляющее воздействие и переменная сигнальной настройки формируются на основе информации о производных выходных переменных  $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_2$ . Оценка производных осуществляется с помощью линейных малоинерционных звеньев, которые принято называть дифференцирующими фильтрами или фильтрами оценки производных (ФОП) [8, с. 92, 9].

Скорость движения платформы оценивается фильтром первого порядка:

$$\mu_1 \dot{\tilde{y}}_1 + \tilde{y}_1 = y_1, \quad (8)$$

где  $\mu_1$  — малая постоянная времени;

$\tilde{y}_1, \dot{\tilde{y}}_1$  — оценки  $y_1$  и  $\dot{y}_1$ , соответственно.

Первая и вторая производные от угла отклонения маятника оцениваются инерционным звеном второго порядка с соответствующей постоянной времени ( $\mu_2$ ) и коэффициентом демпфирования ( $d_p$ ):

$$\mu_2^2 \ddot{y}_2 + 2d_f \mu_2 \dot{y}_2 + \ddot{y}_2 = y_2. \quad (9)$$

С учетом переменных, получаемых с помощью ФОП, уравнения регулятора примут вид:

$$u = \frac{1}{db \cos y_2} [a_{22} \dot{y}_2 + a_{21} y_2 + k_2 d \sin y_2 - k_m] + \frac{1}{b} [(2k_1 - a_{12}) \dot{y}_1 + a_{11} y_1];$$

$$\dot{k}_m = \gamma \text{sign}(\ddot{y}_2 - F_2).$$

### Пример численного моделирования

Моделирование системы стабилизации с сигнальной настройкой выполнено при следующих параметрах объекта управления:  $m_1=0,8$  кг,  $m_2=0,05$  кг,  $L'=0,67$  м,  $k_0=0,05$ .

Ограничение на перемещение платформы принято равным 5 м. Коэффициенты эталонных уравнений (5) определены на основе показателей качества, характеризующих быстродействие системы ( $t_n \leq 15$  с) и перерегулирование ( $\sigma \leq 70\%$ ).

В результате эталонные функции  $F_1$  и  $F_2$  имеют вид:

$$\ddot{y}_1 = F_1 = -\dot{y}_1 - 16,25 y_1;$$

$$\ddot{y}_2 = F_2 = -1,4 \dot{y}_2 - 35 y_2.$$

Инерционности ФОП (8), (9) в контурах управления платформой и маятником полагались равными ( $\mu_1=\mu_2=\mu_f$ ), на порядок меньшими, чем минимальная постоянная времени эталонных моделей ( $T_{ж}$ ).

Процессы, наблюдаемые в синтезированной системе при отработке угла отклонения маятника от положения равновесия в  $30^\circ$ , показаны на **рис. 1**.

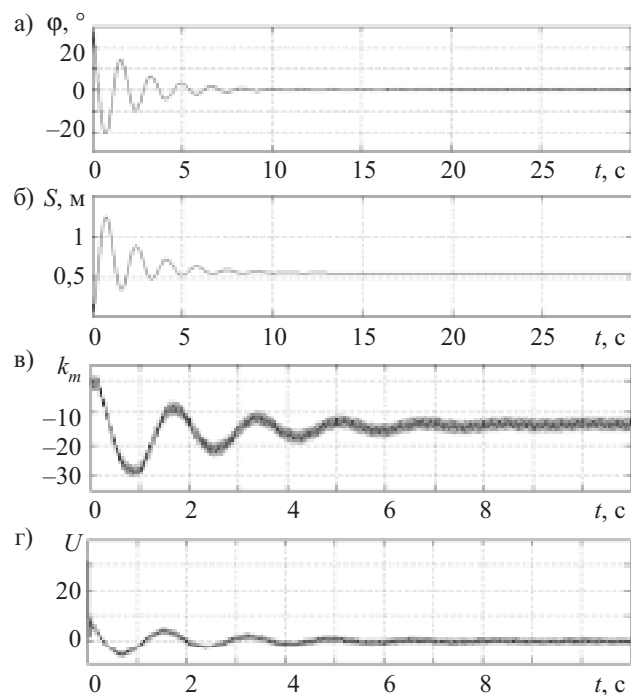


Рис. 1. Графики процессов в системе стабилизации при отработке начального отклонения маятника  $30^\circ$ : а — изменение угла отклонения; б — перемещение платформы; в — выходная переменная адаптора; г — управляющее воздействие

Маятник возвращается в вертикальное положение, а платформа останавливается, но ее положение смещено относительно начального положения.

Максимальное отклонение платформы от начального положения и значение ее конечной координаты существенно зависят от угла отклонения маятника (**рис. 2, а**), который также влияет и на максимальную величину управляющего воздействия (**рис. 2, б**). Свойства системы зависят от соотношения между постоянными времени ФОП ( $\mu_f$ ), эталонных моделей ( $T_{ж}$ ) и коэффициентом передачи адаптора ( $\gamma^{-1}$ ). Чем меньше инерционность ФОП, тем больше должен быть коэффициент передачи адаптора, чем больше угол, тем ближе по значениям должны быть  $\gamma^{-1}$  и постоянная времени ФОП.

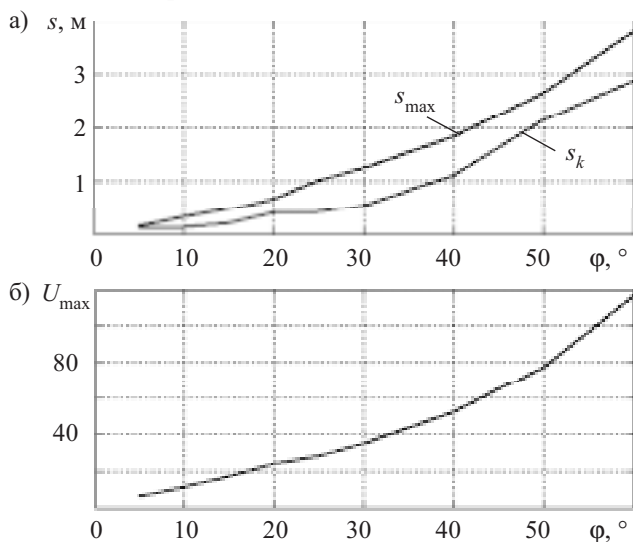


Рис. 2. Влияние угла отклонения маятника на максимальное отклонение и конечное положение платформы (а), на максимальное значение управляющего воздействия (б)

Определено, что платформа может вернуться в исходное состояние, если  $\mu_f=0,025$ . Одновременная стабилизация маятника и платформы в начале координат при углах отклонения, не превышающих  $\pm 60^\circ$ , возможна, если отношение между  $\mu_f$  и  $T_{ж}$  равно 0,125.

Рассмотренный алгоритм управления с сигнальной настройкой был использован в маятниковой установке (**рис. 3**), собранной студентами кафедры автоматики Новосибирского государственного технического университета.

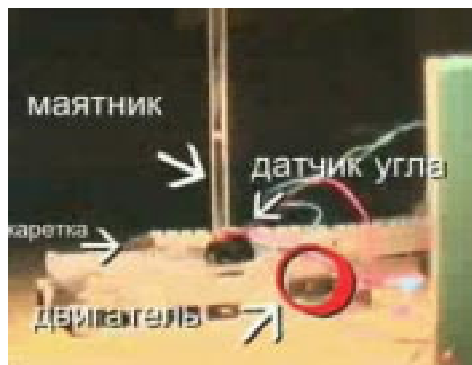


Рис. 3. Маятниковая установка

### Заключение

В рассмотренной системе синтез регулятора выполнен по исходной нелинейной модели объекта управления. Присутствие в системе малоинерционных фильтров оценки производных и «быстрого» адаптора, реализующего сигнальную настройку, привело к возникновению разнотемповых процессов. С одной стороны, это позволило стабилизировать положение маятника при достаточно больших углах отклонения от вертикальной оси ( $\pm 60^\circ$ ), а с другой стороны, привело к трудностям в согласовании параметров адаптивного регулятора, адаптора и ФОП.

Установлено аналитически [10] и подтверждено численным моделированием, что процессы в фильтрах должны быть самыми быстрыми, в то время как эталонные процессы для подсистем «маятник» и «платформа» — самыми медленными. В рассмотренной системе соотношение между их темпом примерно равно 0,125. Темп процессов в адапторе, определяемый коэффициентом  $\gamma = \mu_k^{-1}$ , во многом зависит от угла отклонения: чем больше угол, тем ближе по значениям должны быть  $\gamma^{-1}$  и постоянная времени ФОП.

Наиболее интересно поведение системы при больших углах отклонения маятника от положения равновесия. Для стабилизации процессов требуется большее по величине управляющее воздействие, особенно на начальном этапе работы. Кроме того, замкнутая система становится более чувствительной к соотношению параметров — инерционности фильтров оценки производных, эталонной модели и коэффициента передачи адаптора.

Установлено, что разнесение более чем на порядки темпа процессов в эталонной модели и фильтре оценки производных не всегда приводит к желаемо-

му результату. Данная проблема может быть решена организацией контура настройки параметров фильтра оценки производных на основе полученных результатов.

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Андриевский Б. Р., Гузенко П. Ю., Фрадков А. Л. Управление нелинейными колебаниями механических систем методом скоростного градиента // *АиТ*.— 1996.— № 4.— С. 4—17.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Ружицкая Е. А. Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях // *Известия РАН. Теория и системы управления*.— 2001.— № 1.— С. 29—38.
3. Брусин В. А. Об управлении динамическими системами в условиях неопределенности // *Соросовский образовательный журнал*.— 1996.— № 6.— С. 115—121.
4. Iwashiro M., Furuta K., Astrom K. J. Energy based control of pendulum // *Proc. IEEE Conference on Control Applications*.— Dearborn, Michigan.— 1996.— P. 715—720.
5. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные и оптимальные системы управления.— М.: Мир, 1977.
6. Формальский А. М. О стабилизации перевернутого маятника с неподвижной или подвижной точкой подвеса // *ДАН*.— 2006.— Т. 406, № 2.— С. 175—179.
7. Колесников Ал. А. Синергетическое управление системой «Перевернутый маятник на управляемой тележке» // *Тез. докл. VII Междунар. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»*.— Москва, ИПУ РАН.— 2002.— С. 23—25.
8. Востриков А. С. Синтез систем регулирования методом локализации.— Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
9. Шпиляева О. Я. Робастное адаптивное управление на основе принципа локализации // *Сб. тр. междунар. науч. конф. «Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения»*.— Саратов.— 2000.— С. 169—173.
10. Востриков А. С., Шпиляева О. Я. О разнотемповых движениях в нелинейной адаптивной системе // *Вторая междунар. конф. по проблемам управления. Избранные труды. Т. 1*.— Москва, ИПУ.— 2003.— С. 131—136.

### НОВЫЕ КНИГИ

**Вайсбурд Ф. И., Панаев Г. А., Савельев Б. Н. Электронные приборы и усилители.— М.: ЛКИ, 2007.— 480 с.**

В настоящей книге рассмотрены физические основы работы, устройство, основные характеристики и параметры электронных приборов, а также принципы действия и основы работы усилительных устройств на новой элементной базе. Анализируются схемы электронных усилителей.

Издание соответствует программе курса «Электронные приборы и усилители». Предназначено для учащихся техникумов связи, а также специалистов, работающих с электронными приборами и усилителями, применяемыми в устройствах связи и вещания.

**Гуляева Л. Н. Высококвалифицированный монтажник радиоэлектронной аппаратуры.— М.: Аргумент, 2007.— 176 с.**

Рассмотрены основные свойства полупроводниковых материалов, принципы работы наиболее распространенных полупроводниковых приборов. В доступной для понимания форме изложены принципы работы основных электронных узлов: усилителей, источников питания, генераторов, цепей формирования. Подробно рассмотрены основы радиовещания, телевидения и цифровых электронных цепей.

Для учащихся профессиональных училищ, а также для студентов техникумов связи.

